Risoluzione di problemi ingegneristici con Excel

Problemi Ingegneristici

- Calcolare per via numerica le radici di un’equazione
- Trovare l’equazione che lega un set di dati ottenuti empiricamente (fitting di dati sperimentali)
- Risolvere sistemi lineari per via numerica
- Risolvere sistemi non lineari per via numerica

Radici di un'equazione

- **Problema:** trovare le radici dell'equazione f(x)=0 nell'intervallo [a,b]

- **Soluzione**
  1. Tracciare un grafico della funzione y=f(x) nell'intervallo [a,b]
  2. Individuare gli intervalli entro i quali sono contenute le radici
  3. Usare il **risolutore** per calcolare il valore esatto di ciascuna radice negli intervalli trovati

Radici di un'equazione

J15

	A	B	C
1			
2		a	0
3		b	5
4			
5		x	f(x)
6		0	-1
7		0.1	-1.10417
8		0.2	-1.2134
9		0.3	-1.32286
10		0.4	-1.42782
11		0.5	-1.52372
12		0.6	-1.60612
13		0.7	-1.67075
14		0.8	-1.71354
15		0.9	-1.7306
16		1	-1.71828
17		1.1	-1.67317
18		1.2	-1.59212
19		1.3	-1.4723
20		1.4	-1.3112
21		1.5	-1.10669
22		1.6	-0.85703
23		1.7	-0.56095
24		1.8	-0.21765
25		1.9	0.173106
26		2	0.610944
27		2.1	1.09483
28		2.2	1.622987

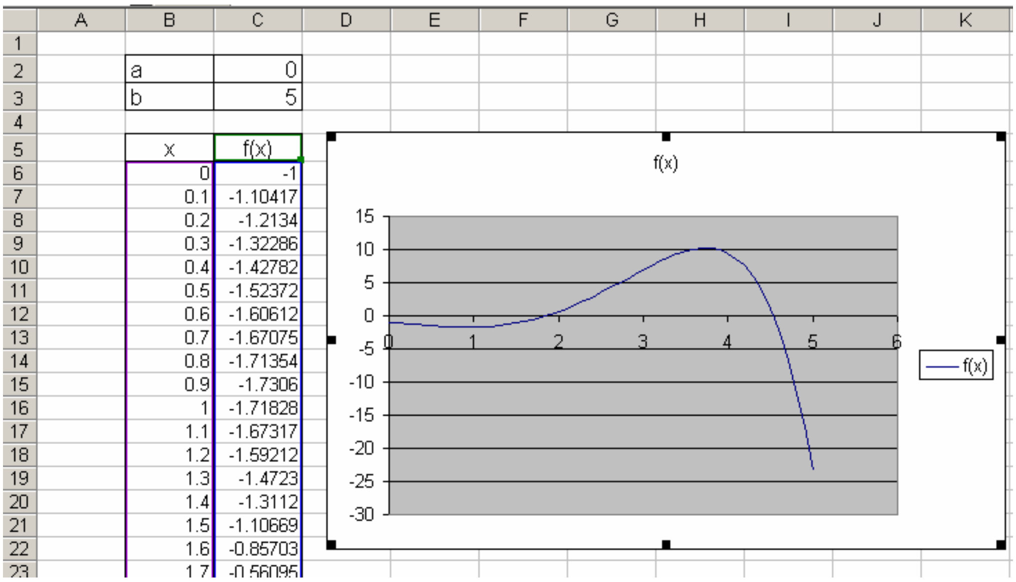
- Esempio: $x^3 - \exp(x) = 0$ in [0,5]

1.a Tabulare i valori di f(x) al variare di x (utilizzare per x un passo di incremento adatto al problema)

= =B6^3-EXP(B6)

Radici di un’equazione

1.b Costruire un *grafico a dispersione* basato sulla tabella ottenuta



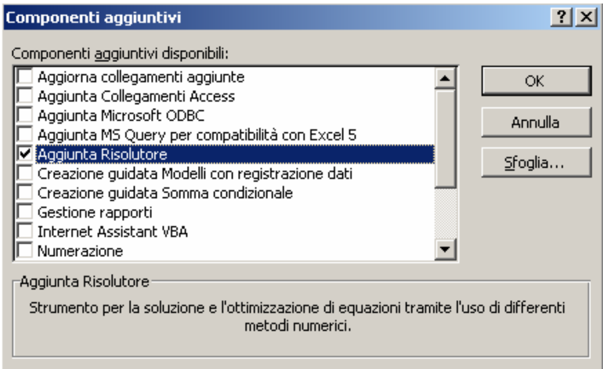
	a	0
	b	5
	x	f(x)
	0	-1
	0.1	-1.10417
	0.2	-1.2134
	0.3	-1.32286
	0.4	-1.42782
	0.5	-1.52372
	0.6	-1.60612
	0.7	-1.67075
	0.8	-1.71354
	0.9	-1.7306
	1	-1.71828
	1.1	-1.67317
	1.2	-1.59212
	1.3	-1.4723
	1.4	-1.3112
	1.5	-1.10669
	1.6	-0.85703
	1.7	-0.56095

Radici di un’equazione

- Da una semplice ispezione del grafico si osserva che esistono due radici
  - Una compresa in [1,2]
  - Una compresa in [4,5]
- Variando la scala del grafico si possono individuare gli intervalli in modo più preciso, se ciò è necessario

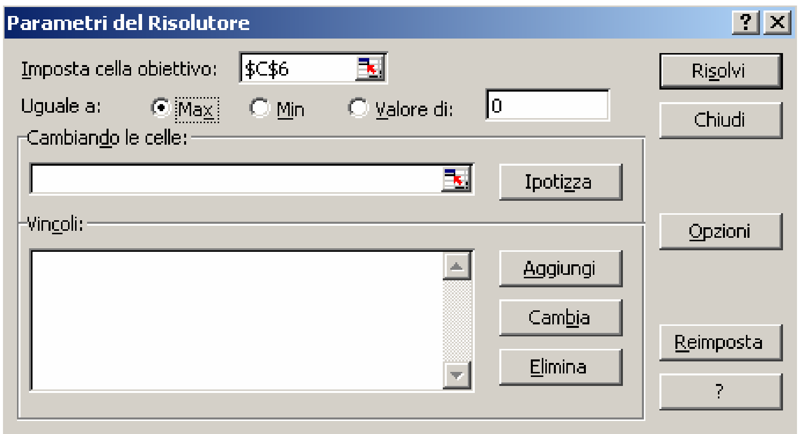
Radici di un’equazione

- Attivare il *risolutore* (*strumenti->risolutore*)
- Se non installato:
  - selezionare *strumenti->componenti aggiuntivi*
  - Selezionare “*aggiunta risolutore*”
  - Attivare il risolutore



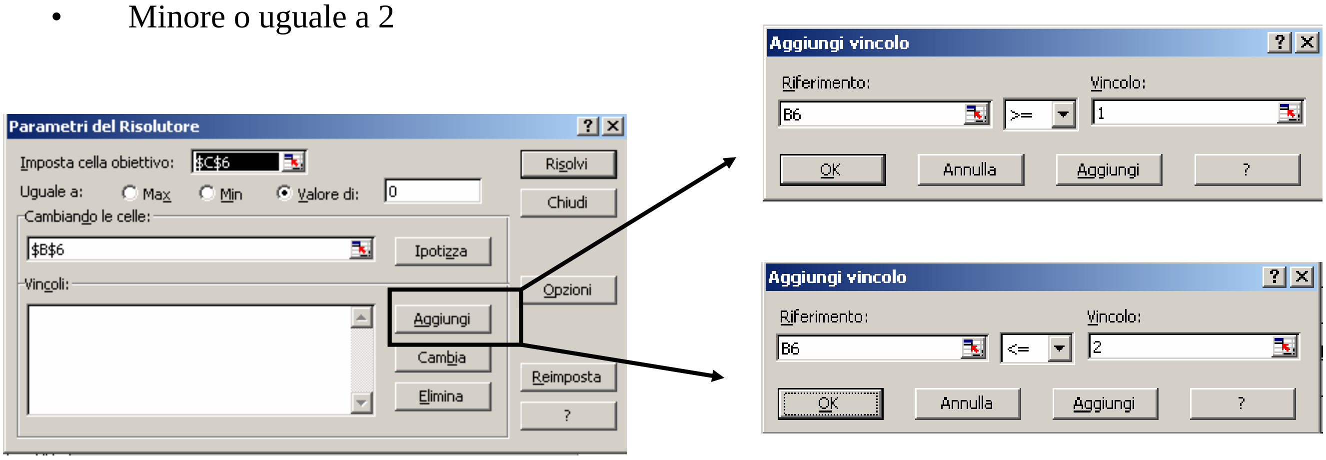
Radici di un’equazione

1. Impostare la cella obiettivo ad una qualunque cella che contenga la formula f(x), ad esempio C6
2. Selezionare “valore di” ed inserire “0” nel riquadro. Infatti, si vuole impostare a zero il valore della cella obiettivo, cioè si vuole far sì che f(x)=0.



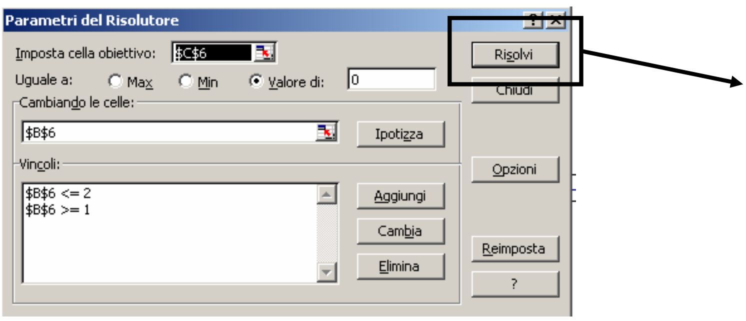
Radici di un’equazione

3. Impostare “cambiando la cella” alla cella che contiene la variabile indipendente sulla base della quale la cella obiettivo è calcolata. Nel nostro caso, sarà B6
4. Per trovare la prima soluzione (quella compresa tra 1 e 2), aggiungere come vincoli che il valore di B6 deve essere
   - Maggiore o uguale a 1
   - Minore o uguale a 2



Radici di un’equazione

- Premere *Risolvi* ed osservare il risultato sulla tabella:
  – La cella C6 conterrà un valore prossimo a zero, e la cella B6 conterrà il corrispondente valore di x



4			
5		x	f(x)
6		1.857184	-1.3E-07
7		0.1	-1.10417
8		0.2	-1.2134
9		0.3	-1.32286

Fitting di dati sperimentali

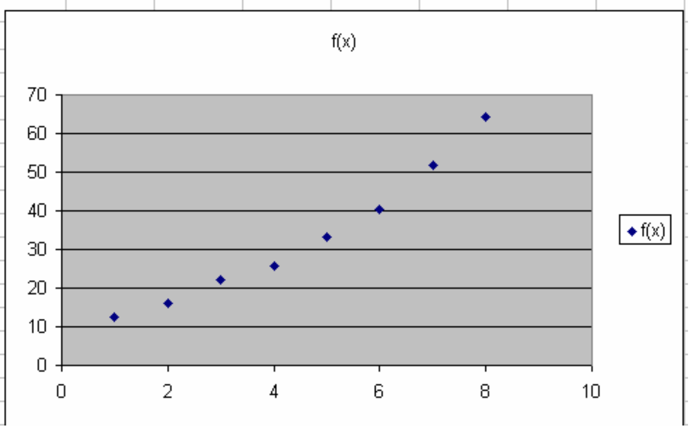
- **Problema**: ho una serie di dati, ottenuti da esperimenti. Vorrei sapere se f(10) sarà maggiore o minore di 100.
  - Devo trovare una legge che descriva la dipendenza nel modo più esatto possibile
  - Sulla base di questa legge, posso stimare quanto valga f(10)

x	f(x)
1	12.35
2	16.21
3	22.21
4	25.67
5	33.16
6	40.21
7	51.95
8	64.26

Fitting di dati sperimentali

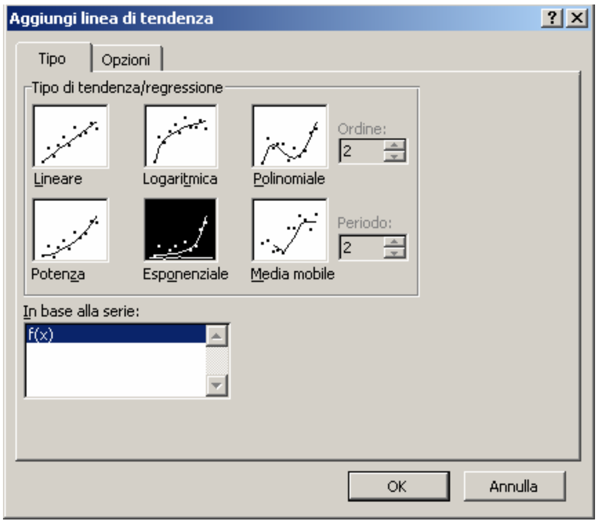
- Inserire un grafico a dispersione dei dati sperimentali, avendo cura di inserire *soltanto* i marcatori (non le linee)

x	f(x)
1	12.35
2	16.21
3	22.21
4	25.67
5	33.16
6	40.21
7	51.95
8	64.26



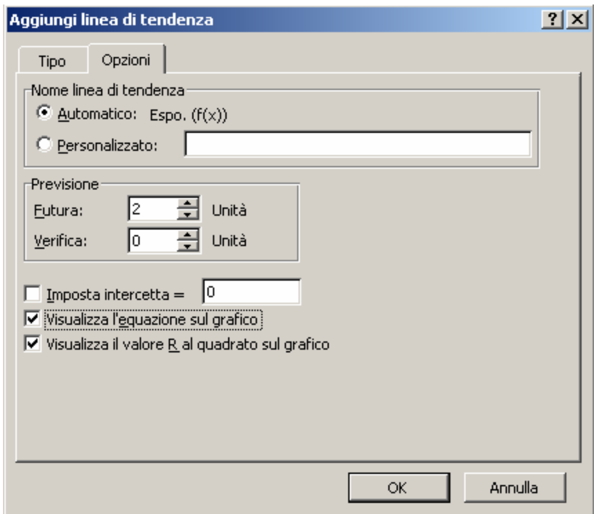
Fitting di dati sperimentali

- Cliccare con il tasto destro su un punto del grafico, ed aggiungere una *linea di tendenza*
- Scegliere (eventualmente per tentativi) il tipo di linea di tendenza più adatto all'andamento del grafico



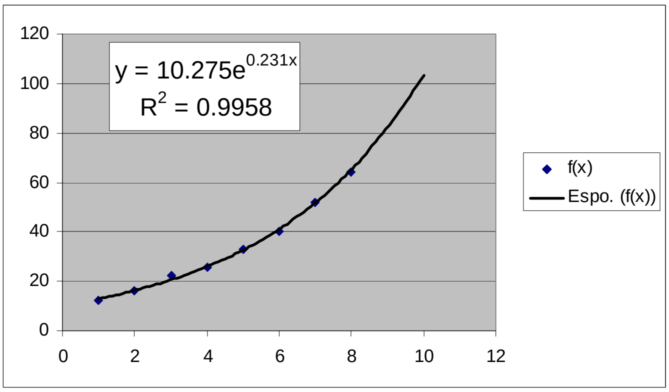
Fitting di dati sperimentali

- Selezionare *previsione futura* ed impostarla a 2 unità, in modo da poter verificare cosa succede per x=10
- Richiedere di visualizzare l'equazione sul grafico
- Richiedere di visualizzare il valore di R^2 sul grafico.



Fitting di dati sperimentali

- Viene visualizzata sul grafico l'equazione corrispondente alla linea di tendenza trovata
- Tanto più R^2 è prossimo ad 1, tanto migliore è l'approssimazione dei dati sperimentali
- Si può verificare direttamente sul grafico cosa succede quando x=10.



Sistemi lineari

- **Problema:** devo risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

- Soluzione
  - Formulo il problema in modo matriciale: Ax=b
  - Lo risolvo usando le formule-matrice di Excel

Sistemi lineari

- Scrivo in due intervalli di celle la matrice dei coefficienti ed il vettore dei termini noti

	A	B	C	D	E	F
1			**A**			**b**
2		1	-1	4		0
3		2	3	-1		1
4		0	1	1		3
5						

- Calcolo il determinante di A, per verificare che la matrice sia invertibile

C6 = =MATR.DETERM(B2:D4)

	A	B	C	D	E	F
1			**A**			**b**
2		1	-1	4		0
3		2	3	-1		1
4		0	1	1		3
5						
6		det(A):	14			
7						

Sistemi lineari

- Calcolo la matrice inversa di A utilizzando la formula-matrice MATR.INVERSA() di Excel

B9 = {=MATR.INVERSA(B2:D4)}

	A	B	C	D	E	F
1			**A**			**b**
2		1	-1	4		0
3		2	3	-1		1
4		0	1	1		3
5						
6		det(A):	14			
7						
8			**inv(A)**			
9		0.285714	0.357143	-0.78571		
10		-0.14286	0.071429	0.642857		
11		0.142857	-0.07143	0.357143		

Sistemi lineari

- Moltiplico l'inversa di A per il vettore dei termini noti b, usando la formula-matrice MATR.PRODOTTO()

F9 = {=MATR.PRODOTTO(B9:D11;F2:F4)}

	B	C	D	E	F
1		A			b
2	1	-1	4		0
3	2	3	-1		1
4	0	1	1		3
5					
6	det(A):	14			
7					
8		inv(A)			inv(A)xb
9	0.285714	0.357143	-0.78571		-2
10	-0.14286	0.071429	0.642857		2
11	0.142857	-0.07143	0.357143		1

Sistemi lineari

- Il vettore così trovato è la soluzione x del sistema lineare.
- Volendo, si può verificare che Ax=b
- La soluzione è corretta, a meno di piccole approssimazioni (cioè –8.88178E-16≈0)

H6 = {=MATR.PRODOTTO(B2:D4;F9:F11)}

	B	C	D	E	F	G	H
1		A			b		
2	1	-1	4		0		
3	2	3	-1		1		
4	0	1	1		3		
5							Axx
6	det(A):	14					-8.88178E-16
7							1
8		inv(A)			inv(A)xb		3
9	0.285714	0.357143	-0.78571		-2		
10	-0.14286	0.071429	0.642857		2		
11	0.142857	-0.07143	0.357143		1		
12							

Sistemi non lineari

- **Problema:** devo trovare una soluzione per il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} 4x_1^3 - \left(3x_2\right)^{0.5} = 20 \\ x_1 x_2^2 - 2/x_1 = 50 \end{cases}$$

- **Soluzione**:
  - Lo trasformo in un'unica equazione
  - Risolvo l'equazione tramite il *risolutore* di Excel

Sistemi non lineari

- Per prima cosa, devo portare il sistema nella seguente forma (il che è sempre possibile):

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0, \\ f_2\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \\ ... \\ f_k\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \end{cases}$$

- Nel nostro caso:

$$\begin{cases} 4x_1^3 - \left(3x_2\right)^{0.5} - 20 = 0 \\ x_1 x_2^2 - 2/x_1 - 50 = 0 \end{cases}$$

Sistemi non lineari

- **Osservazione**: l’insieme delle soluzioni dei due problemi è *identico*

$$\begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0, \\ f_2\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 \\ \dots \\ f_k\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_1, \dots, x_n\right)^2 = 0$$

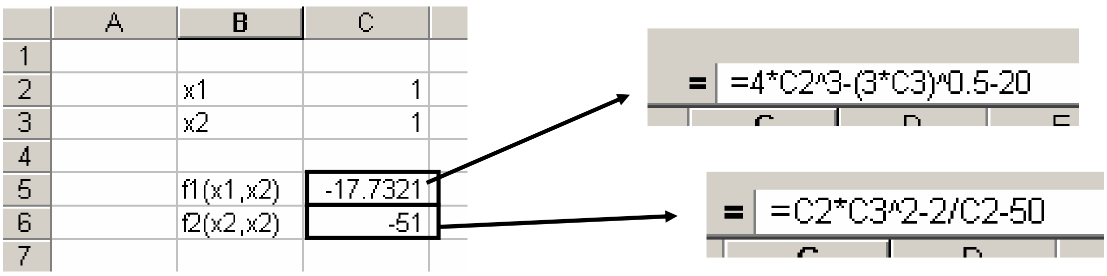
- Infatti:
  - Se $\left[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right]$ è soluzione per il primo, allora lo è anche per il secondo
  - Se $\left[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\right]$ è soluzione per il secondo, allora non è possibile che esista qualche *i* per cui $f_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) \neq 0$, quindi è soluzione anche per il primo

Sistemi non lineari

- Per risolvere il secondo problema, posso:
  - Scrivere in una cella un’equazione che dipende da *n* variabili
  - Usare il *risolutore* per impostare a zero il valore della cella che contiene tale equazione, cambiando le celle che contengono le variabili

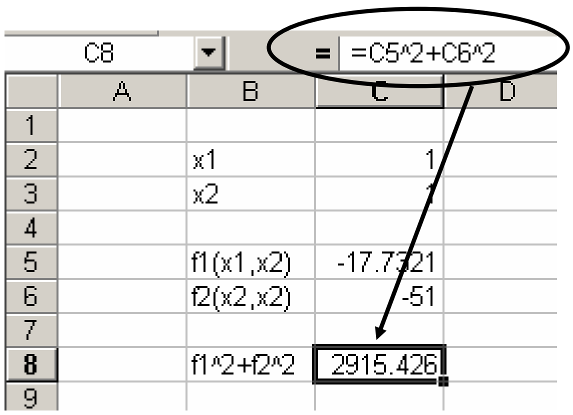
Sistemi non lineari

- Utilizzo *n* celle *contigue* per contenere un valore per le variabili indipendenti $x_1,\ldots,x_n$, alle quali assegno inizialmente un valore qualunque
- Scrivo le *k* espressioni che si trovano al membro sinistro del sistema non lineare, in *k* celle contigue, riferendo le *n* celle che contengono le variabili indipendenti
- Nel nostro caso, $n=k=2$



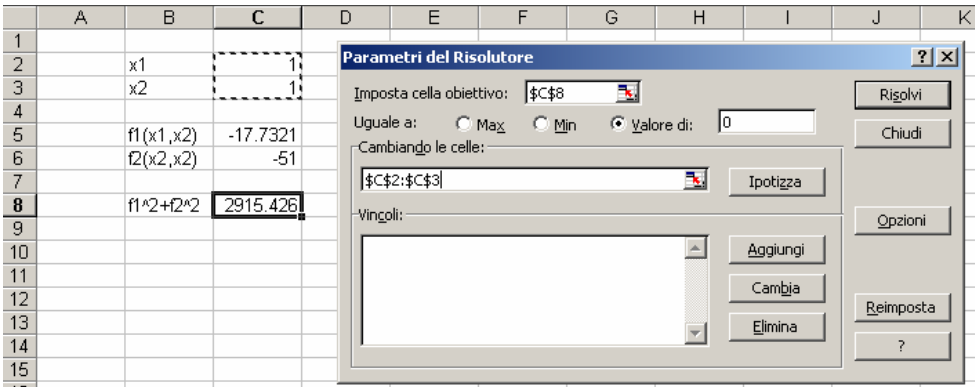
Sistemi non lineari

- Sulla base delle espressioni già scritte, posso quindi calcolare l'espressione $\sum_{i=1}^{k} f_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)^2$



Sistemi non lineari

- Adesso ho una cella (C8) il cui valore dipende, in ultima analisi, dal valore di un intervallo di celle (C2:C3).
- Posso usare il *risolutore* per impostare a zero il valore della cella C8 cambiando il valore delle celle (C2:C3)
- Se il problema ha dei vincoli, li posso eventualmente aggiungere



Sistemi non lineari

- Dopo aver premuto *risolvi*, ottengo una coppia di valori per le 2 variabili indipendenti che
  - Rendono nulle (a meno di piccole approssimazioni) le espressioni intermedie
  - Rendono ovviamente nulla (a meno di piccole approssimazioni) la somma dei loro quadrati scritta nella cella obiettivo
- Tali valori sono quindi una soluzione del sistema

	A	B	C
1			
2		x1	1.816822
3		x2	5.303429
4			
5		f1(x1,x2)	-0.00058
6		f2(x2,x2)	-0.00022
7			
8		f1^2+f2^2	3.88E-07
9			
10			